PART2　指数関数を含む方程式・不等式

2　[1]　次の方程式を解け。

(1)　$5^{2x+1}+4\cdot5^{x}-1=0$　　(2)　$3^{x}+3^{-x}=2$

[2]　次の不等式を解け。

(1)　$2^{4x}-4^{x+1}>0$　　(2)　$\left(\frac{1}{9}\right)^{x}-\frac{12}{3^{x}}+27<0$

Point Pickup

[1]　底を揃えて，指数の性質

$a>0$，$a\neq1$ のとき　$p=q \iff a^{p}=a^{q}$

を利用する。$a^{x}>0$ であることに注意。

[2]　底を揃えて，指数の大小に関する性質

$a>1$ のとき　$p<q \iff a^{p}<a^{q}$

$0<a<1$ のとき　$p<q \iff a^{p}>a^{q}$

を利用する。$a^{x}>0$ であることに注意。

第11講　PART2　確認問題

次の方程式，不等式を解け。

1　$3\cdot 16^{x}-4^{x+1}-4=0$

$x=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

2　$5^{x}-5^{1-x}=4$

$x=\boxed{ウ}$

3　$3^{2x+1}-4\cdot 3^{x}+1\leqq 0$

$\boxed{エ}$

① $x\leqq -1$　② $x\leqq 0$　③ $x\leqq 1$

④ $x\geqq -1$　⑤ $x\geqq 0$　⑥ $x\geqq 1$

⑦ $-1\leqq x\leqq 0$　⑧ $0\leqq x\leqq 1$

⑨ $-1\leqq x\leqq 1$

4　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-1}-11\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}-20>0$

$\boxed{オ}$

① $x<-2$　② $x<-1$　③ $x<2$

④ $x>-2$　⑤ $x>-1$　⑥ $x>2$

⑦ $-2<x<-1$　⑧ $-1<x<2$

⑨ $-2<x<2$

PART2　指数関数を含む方程式・不等式

2　[1]　次の方程式を解け。

(1)　$5^{2x+1}+4\cdot5^x-1=0$　　(2)　$3^x+3^{-x}=2$

[2]　次の不等式を解け。

(1)　$2^{4x}-4^{x+1}>0$　　(2)　$\left(\frac{1}{9}\right)^x-\frac{12}{3^x}+27<0$

[1]　(1)　$5^{2x+1}+4\cdot5^x-1=0$　より　$5\cdot(5^x)^2+4\cdot5^x-1=0$

$5^x=t$ とおくと　$t>0$

$5t^2+4t-1=0$　　$(t+1)(5t-1)=0$

$t>0$ より　$t=\frac{1}{5}$　　よって　$5^x=5^{-1}$　より　$x=-1$

(2)　$3^x+3^{-x}=2$　より　$3^x+\frac{1}{3^x}=2$　　$(3^x)^2-2\cdot3^x+1=0$

$3^x=t$ とおくと　$t>0$

$t^2-2t+1=0$　　$(t-1)^2=0$

$t>0$ より　$t=1$　　よって　$3^x=1$　より　$x=0$

[2]　(1)　$2^{4x}-4^{x+1}>0$　より　$(4^x)^2-4\cdot4^x>0$

$4^x=t$ とおくと　$t>0$

$t^2-4t>0$　　$t(t-4)>0$

$t>0$ より　$t>4$　　よって　$4^x>4$

底 4 は 1 より大きいから　$x>1$

(2)　$\left(\frac{1}{9}\right)^x-\frac{12}{3^x}+27<0$　より　$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+27<0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと　$t>0$

$t^2-12t+27<0$　　$(t-3)(t-9)<0$　　$3<t<9$　よって　$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$-2<x<-1$

第11講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2

[解説]

$3\cdot16^x-4^{x+1}-4=0$ より

$$3\cdot(4^x)^2-4\cdot4^x-4=0 \quad \text{[A]}$$

$4^x=t$ とおくと　$t>0$

$$3t^2-4t-4=0$$

$$(3t+2)(t-2)=0$$

$t>0$ より　$t=2$ [B]

ゆえに　$4^x=2$　すなわち　$2^{2x}=2^1$ [C]

よって　$x=\dfrac{1}{2}$

[A]　底を揃える。

[B]　$a^x>0$ に注意。

[C]　$a>0$，$a\neq1$ のとき
　$p=q \Longleftrightarrow a^p=a^q$

2

[正解] ウ：1

[解説]

$5^x-5^{1-x}=4$ より

$$5^x-5\cdot\frac{1}{5^x}=4$$

$$(5^x)^2-4\cdot5^x-5=0$$

$5^x=t$ とおくと　$t>0$

$$t^2-4t-5=0$$

$$(t+1)(t-5)=0$$

$t>0$ より　$t=5$ [B]

ゆえに　$5^x=5$　すなわち　$5^x=5^1$ [C]

よって　$x=1$

3 [正解] エ：⑦

[解説]

$3^{2x+1}-4\cdot 3^x+1 \leqq 0$ より

$$3\cdot(3^x)^2-4\cdot 3^x+1 \leqq 0$$

$3^x=t$ とおくと　$t>0$

$$3t^2-4t+1 \leqq 0$$

$$(3t-1)(t-1) \leqq 0$$

よって　$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq 1$　（これは $t>0$ を満たす）[B]

ゆえに　$\dfrac{1}{3} \leqq 3^x \leqq 1$

すなわち　$3^{-1} \leqq 3^x \leqq 3^0$ [D]

底 3 は 1 より大きいから　$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 0}$

[D]　指数の大小の性質
$a>1$ のとき　$p<q \Longleftrightarrow a^p<a^q$
$0<a<1$ のとき　$p<q \Longleftrightarrow a^p>a^q$

4 [正解] オ：①

[解説]

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-1}-11\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-20>0$ より

$$4\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-11\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-20>0$$ [A]

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと　$t>0$

$$4t^2-11t-20>0$$

$$(4t+5)(t-4)>0$$

$t>0$ より $4t+5>0$ であるから [B]

$$t>4$$

ゆえに　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>4$

すなわち　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$ [D]

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$\boldsymbol{x<-2}$